Enseignant : Dr. Sylvain Bréchet
Cours : physique générale I
Echéance : vendredi 5 décembre 2025
Durée : 90 minutes

3

Oscillateur sur plan incliné

NOM :

PRENOM :

N° SCIPER :

SECTION : **Mathématiques**

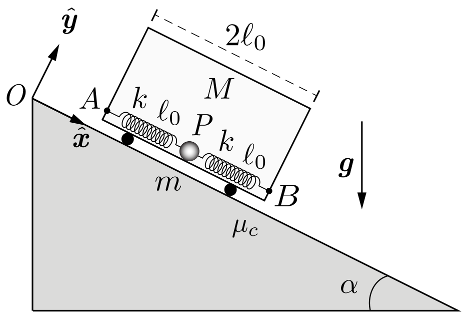
SALLE :

L'exercice à rendre comporte un énoncé illustré et détaillé sur la page de gauche et des questions sur la page de droite. Les développements mathématiques et physiques sont à effectuer sur les pages quadrillées.

Consignes

- Le **formulaire** de l'examen (1 page A4 recto-verso) est autorisé.
- L'utilisation de tout **appareil électronique** est interdite.
- Les **réponses** sont à retranscrire sur les pointillés sous chaque question dans l'espace réservé à cet effet.
- Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé** (éviter d'utiliser un crayon) et effacer proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les feuilles de papier **brouillon** ne seront **pas corrigées**.

3. Oscillateur sur plan incliné



Un wagon de masse M et de longueur $2\ell_0$ se déplace le long d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale avec un frottement sec caractérisé par un coefficient de frottement cinétique constant μ_c qui satisfait la condition,

$$\mu_c \geqslant \tan\alpha$$

Un point matériel P de masse m est attaché à deux ressorts identiques de masse négligeable, de constante élastique k et de longueur au repos ℓ_0, fixés aux points A et B sur les parois arrière et avant du wagon respectivement. Le point matériel P peut glisser sans frottement sur le sol du wagon le long du plan incliné. Il a un mouvement relatif rectiligne dans le référentiel relatif du wagon. Le wagon et le point matériel sont soumis au champ gravitationnel terrestre $\boldsymbol{g}$.

Pour décrire la dynamique du système formé du wagon et du point matériel P, on prend un repère cartésien $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ attaché à l'origine O choisie au haut du plan incliné. Ce repère est fixe par rapport au référentiel d'inertie absolu $\mathcal{R}$ du plan incliné. On prend un repère cartésien $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ attaché au point A. Ce repère est mobile par rapport au référentiel d'inertie absolu $\mathcal{R}$ du plan incliné et fixe par rapport au référentiel accéléré relatif $\mathcal{R}'$ du wagon. Le vecteur position absolue $\boldsymbol{r}_a(A)$ et le vecteur position relative $\boldsymbol{r}_r(P)$ s'écrivent,

$$\boldsymbol{r}_a(A) = \boldsymbol{OA} = X\,\hat{\boldsymbol{x}} + Y\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \text{où} \qquad Y = \text{cste} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{r}_r(P) = \boldsymbol{AP} = x\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

La masse et le moment d'inertie des roues du wagon sont négligeables. Le mouvement du wagon (c'est-à-dire du point A) peut donc être considéré comme celui d'un point matériel. La masse M du wagon vide est très grande par rapport à la masse m du point matériel, c'est-à-dire $m \ll M$. Dans cette approximation, l'influence du mouvement du point matériel sur le mouvement du wagon est négligeable. Le mouvement du wagon peut donc être étudié en négligeant simplement la masse m du point matériel. La réciproque n'est pas vraie.

Les réponses doivent être exprimées en termes de la coordonnée cartésienne relative x et de ses dérivées temporelles, du vecteur de base $\hat{\boldsymbol{x}}$, de la masse m, du coefficient de frottement cinétique μ_c, de la constante élastique k, de la longueur à vide ℓ_0, de l'angle α, de la norme du champ gravitationnel g et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes

1. En négligeant la masse et le mouvement du point matériel P, montrer que l'accélération absolue $\boldsymbol{a}_a(A)$ du point A du wagon s'écrit,

$$\boldsymbol{a}_a(A) = g\,(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)\,\hat{\boldsymbol{x}}\,.$$

En négligeant l'influence du point matériel P sur le mouvement du wagon, les forces extérieures exercées sur le wagon sont son poids $\boldsymbol{P}_M$ et la force de réaction normale $\boldsymbol{N}_M$ du plan incliné et la force de frottement cinétique sec $\boldsymbol{F}_f$ à l'interface entre le wagon et le plan,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P}_M = M\,\boldsymbol{g} = Mg\,(\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}} - \cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}})\ ,\\ &\boldsymbol{N}_M = N_M\,\hat{\boldsymbol{y}}\,,\\ &\boldsymbol{F}_f = -\,\mu_c\,N_M\,\hat{\boldsymbol{x}}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

L'accélération absolue du point A qui se déplace le long du plan incliné est,

$$\boldsymbol{a}_a(A) = \ddot{X}\,\hat{\boldsymbol{x}}\,. \tag{2}$$

La loi du mouvement absolu du wagon s'écrit,

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P}_M + \boldsymbol{N}_M + \boldsymbol{F}_f = M\,\boldsymbol{a}_a(A)\ . \tag{3}$$

En substituant les expressions des forces extérieures (1) et de l'accélération (2) dans la loi vectorielle du mouvement absolu (3) du wagon, et en la projetant le long des lignes de coordonnées cartésiennes absolues dans le plan vertical, on obtient les deux équations scalaires suivantes,

$$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{x}}:\quad Mg\,\sin\alpha - \mu_c\,N_M = M\ddot{X}\,, \tag{4}$$

$$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{y}}:\quad -\,Mg\,\cos\alpha + N_M = 0\,. \tag{5}$$

La substitution de l'équation de contrainte (5) dans l'équation du mouvement(5) donne la coordonnée d'accélération du wagon,

$$\ddot{X} = g\,(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)\ . \tag{6}$$

En substituant la coordonnée (6) dans le vecteur accélération absolue du wagon (2), celui-ci devient,

$$\boldsymbol{a}_a(A) = g\,(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)\,\hat{\boldsymbol{x}}\,. \tag{7}$$

2. Déterminer le coefficient de frottement cinétique $\mu_{c,0}$ pour lequel le mouvement du wagon est un mouvement rectiligne uniforme en se souvenant qu'on néglige la masse et le mouvement du point matériel P.

Pour que le mouvement du wagon soit un mouvement rectiligne uniforme, il faut que l'accélération absolue du wagon soit nulle, c'est-à-dire $\boldsymbol{a}_a(A) = \boldsymbol{0}$. L'accélération (7) est donc nulle lorsque $\mu_c = \mu_{c,0}$. Ainsi,

$$\mu_{c,0} = \tan\alpha\,. \tag{8}$$

3. Déterminer la force élastique résultante $\boldsymbol{F}_e$ exercée sur le point matériel P.

La force élastique résultante $\boldsymbol{F}_e$ est la somme des forces élastiques $\boldsymbol{F}_{e,g}$ et $\boldsymbol{F}_{e,d}$ exercées par les ressorts de gauche et de droite,

$$\boldsymbol{F}_e = \boldsymbol{F}_{e,g} + \boldsymbol{F}_{e,d} = -\,k\,(x - \ell_0)\,\hat{\boldsymbol{x}} - k\,(x - \ell_0)\,\hat{\boldsymbol{x}} = -\,2k\,(x - \ell_0)\,\hat{\boldsymbol{x}}\,. \tag{9}$$

4. Montrer que l'équation du mouvement relatif du point matériel P le long de la ligne de coordonnée relative d'abscisse x dans le référentiel relatif du wagon $\mathcal{R}'$ s'écrit,

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}\,(x - \ell_0) - \mu_c\,g\,\cos\alpha = 0\,.$$

Les forces extérieures exercées sur le point matériel P sont son poids $\boldsymbol{P}_m$, la force de réaction normale du wagon $\boldsymbol{N}_m$ et la force élastique résultante (9),

$$\boldsymbol{P}_m = m\,\boldsymbol{g} = mg\left(\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}} - \cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}\right) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{N}_m = N_m\,\hat{\boldsymbol{y}}\,. \tag{10}$$

La force d'inertielle est,

$$\boldsymbol{F}_i = -\,m\,\boldsymbol{a}_a\left(A\right) = -\,mg\left(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha\right)\hat{\boldsymbol{x}}\,. \tag{11}$$

L'accélération relative du point matériel P le long du plan incliné du référentiel relatif du wagon $\mathcal{R}'$ s'écrit,

$$\boldsymbol{a}_r\left(P\right) = \ddot{x}\,\hat{\boldsymbol{x}}\,. \tag{12}$$

La loi du mouvement relatif du point matériel s'écrit,

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = \boldsymbol{P}_m + \boldsymbol{N}_m + \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_i = m\,\boldsymbol{a}_r\left(P\right)\,. \tag{13}$$

En substituant les expressions de la force élastique résultante (9), du poids et de la force de réaction normale du wagon (10), de la force d'inertielle (11) et de l'accélération (12) dans la loi vectorielle du mouvement relatif (13) du point matériel P, et en la projetant le long des lignes de coordonnées cartésiennes relatives dans le plan vertical, on obtient les deux équations scalaires suivantes,

$$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{x}}:\quad mg\sin\alpha - mg\left(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha\right) - 2k\left(x - \ell_0\right) = m\ddot{x}\,, \tag{14}$$

$$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{y}}:\quad -\,mg\cos\alpha + N_m = 0\,. \tag{15}$$

L'équation du mouvement le long de la ligne de coordonnée relative d'abscisse (14) se réduit à,

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}\left(x - \ell_0\right) - \mu_c\,g\,\cos\alpha = 0\,. \tag{16}$$

5. Déterminer la coordonnée relative d'équilibre x_0 du point matériel P.

L'équation du mouvement relatif (16) peut être mise sous la forme,

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}\left(x - \ell_0 - \frac{m}{2k}\,\mu_c\,g\,\cos\alpha\right) = 0\,. \tag{17}$$

A l'équilibre en $x = x_0$, la composante d'abscisse de l'accélération relative est nulle,

$$\ddot{x}_0 = 0\,, \tag{18}$$

ce qui implique que la coordonnée d'abscisse relative à l'équilibre est,

$$x_0 = \ell_0 + \frac{m}{2k}\,\mu_c\,g\,\cos\alpha\,. \tag{19}$$

6. Dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ du plan incliné, déterminer l'énergie potentielle totale $V\left(x\right)$ du point matériel P comme fonction de la coordonnée relative x en prenant comme référence d'énergie potentielle de pesanteur la droite horizontale qui passe par le point A, et comme référence d'énergie potentielle élastique le centre du wagon, c'est-à-dire le point à équidistance des points A et B. Montrer ensuite explicitement par le calcul la stabilité ou l'instabilité de la coordonnée d'équilibre x_0.

Dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ du plan incliné, l'énergie potentielle de pesanteur $V_g\left(x\right)$ et l'énergie potentielle élastique $V_e\left(x\right)$ du point matériel P s'écrivent,

$$V_g\left(x\right) = -\,mg\,x\sin\alpha\,, \tag{20}$$

$$V_e\left(x\right) = k\left(x - \ell_0\right)^2\,. \tag{21}$$

L'énergie potentielle totale $V\left(x\right)$ est la somme des énergies potentielles de pesanteur et élastique,

$$V\left(x\right) = V_g\left(x\right) + V_e\left(x\right) = -\,mg\,x\sin\alpha + k\left(x - \ell_0\right)^2\,. \tag{22}$$

La dérivée seconde de l'énergie potentielle (22) évaluée à l'équilibre est donnée par,

$$\frac{d^2V}{dx^2}\,(x_0) = 2k > 0\,, \tag{23}$$

ce qui montre que la position d'équilibre x_0 est un minimum de la fonction énergie potentielle totale $V\,(x)$, et donc une solution d'équilibre stable.

7. Déterminer la période d'oscillation T du point matériel P lorsqu'elle existe.

Compte tenu de la coordonnée relative d'équilibre (19), l'équation du mouvement relatif (17) peut être mise sous la forme suivante,

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}\,(x - x_0) = 0\,. \tag{24}$$

A l'aide de la déviation par rapport à l'équilibre,

$$z = x - x_0 \qquad \text{ainsi} \qquad \ddot{z} = \ddot{x}\,, \tag{25}$$

on constate que l'équation du mouvement (24) devient,

$$\ddot{z} + \frac{2k}{m}\,z = 0\,, \tag{26}$$

ce qui décrit un mouvement oscillatoire de pulsation,

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}\,, \tag{27}$$

et donc de période,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}\,. \tag{28}$$